Физика

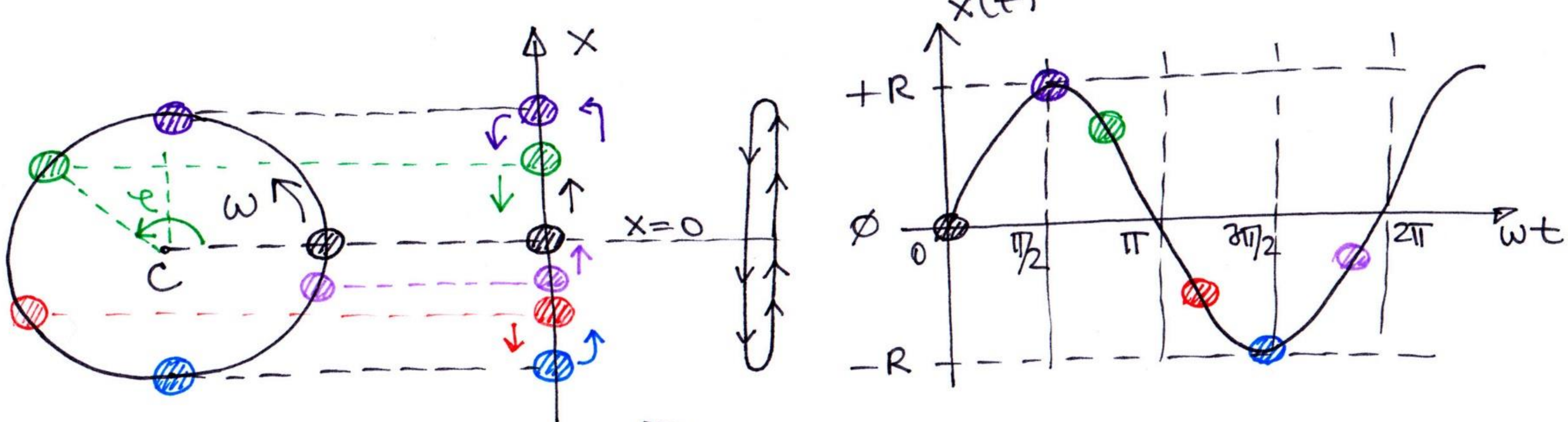
за софтверско инжењерство

Белешке са предавања 5

6. новембар 2019

СОПСТВЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

ПРОСТО ХАРМОНИЈСКО КРЕТАЊЕ



КРЕТАЊЕ ПО КРУЖНИЦИ КОНСТАНТНОМ УГАОНОМ БРЗИНОМ $\omega = const$

ПРОЈЕКЦИЈА ПОЛОЖАЈА ТАЧКЕ НА ПРАВАЦ ПАРАЛЕЛАН ПРЕЧНИКУ

$x(t) = R \cdot \sin\varphi = R \sin \omega t$

↓

ХАРМОНИЈСКО КРЕТАЊЕ sin / cos

$$\boxed{x(t) = R \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$$

АМПЛИТУДА (МАКСИМАЛНО УДАЉЕЊЕ) A

КРУЖНА УЧЕСТАНОСТ $\omega \left[\frac{rad}{s}\right]$

ПОЧЕТНА ФАЗА $\varphi\,[rad]$

→ У ОПШТЕМ СЛУЧАЈУ КРУЖНА УЧЕСТАНОСТ И УГАОНА БРЗИНА НИСУ ИСТО!

→ БРЗИНА ПРИ ПРОСТОМ ХАРМОНИЈСКОМ КРЕТАЊУ

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \underbrace{A\omega}_{\boxed{v_{max} = A\omega}} \cos(\omega t + \varphi) = v_{max} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}$$

ф-ја која је
фазно померена
за $\pi/2$ у односу на $x(t)$

→ УБРЗАЊЕ ПРИ ПРОСТОМ ХАРМОНИЈСКОМ КРЕТАЊУ

$$a(t) \equiv \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

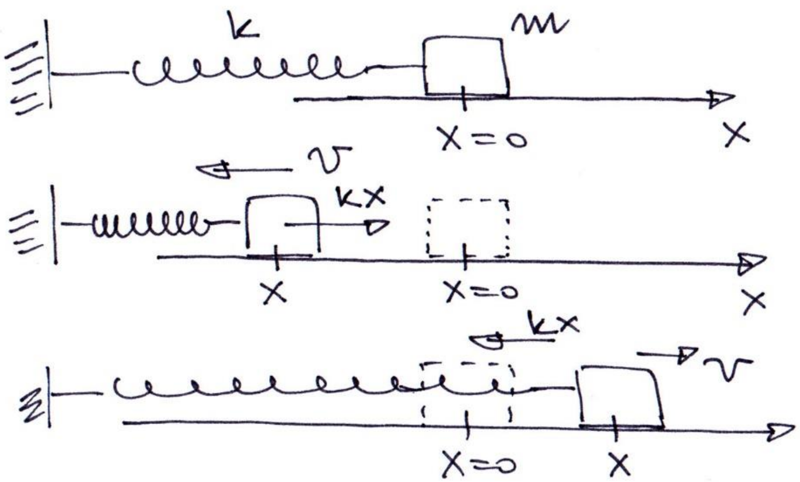
$$a(t) = -\underbrace{a_{max}}_{\boxed{a_{max} = A\omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

шта значи − ?

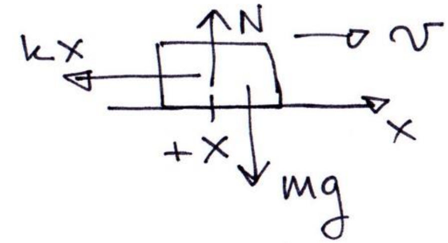
нацртај $-x(t)$ и
размотри.

$\boxed{\text{Пр.21}}$ Тачка се креће у xOy равни, по кружници полупречника A, са центром у координатном почетку. Угаона брзина ротације је константна и износи ω. Ако се тачка у почетном тренутку налазила у координати $(+A, 0)$ и креће се у смеру контра у односу на смер казаљке на часовнику, одредити пројекције позиције, брзине и убрзања тачке на x-осу. Скицирати графике временске зависности тражених пројекција.

ЛИНЕАРНИ ХАРМОНИЈСКИ ОСЦИЛАТОР (ЛХО)



Ј-НА КРЕТАЊА: $m\vec{a} = \sum_k \vec{F}_k$



$N = mg$ НЕМА КРЕТАЊА У y-ПРАВЦУ

$ma = -kx$ (ХУКОВ ЗАКОН)

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦ. Ј-НА II РЕДА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈ.

ПОТРЕБНО ЈЕ РЕШИТИ ДО $x(t)$!!

МЕТОДЕ РЕШАВАЊА:

1. РАЗДВАЈАЊЕ ПРОМЕНЉИВИХ
2. ПОГАЂАЊЕ

које функције могу да задоволе услов да је 2. извод иста ф-ја ?

1. $x(t) = A\sin(Bt+C)$

ЗАМЕНИ У Ј-НУ: $m\ddot{x} = -kx$

$\dot{x} = AB\cos(Bt+C)$

$\ddot{x} = -AB^2\sin(Bt+C)$

$\rightarrow -m\cancel{A}B^2\cancel{\sin(Bt+C)} = -k\cancel{A}\cancel{\sin(Bt+C)}$

$\rightarrow B = \sqrt{\frac{k}{m}}$

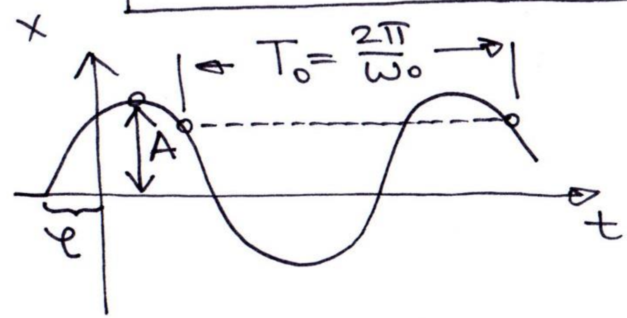
2. $x(t) = A\cos(Bt+C)$

3. $x(t) = Ae^{Bt+C}$

4. $x = 0$

A, C СУ КОНСТАНТЕ (У ФИЗИЧКОМ ПРОБЛЕМУ НИСУ ПРОИЗВОЉНЕ)

$\rightarrow \boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)}$



$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

СОПСТВЕНА ФРЕКВЕНЦИЈА

КОНСТАНТЕ A И φ ИЗ ПОЧЕТНИХ УСЛОВА:

$x(t=0) = A\sin\varphi$

$v(t=0) = A\omega_0\cos\varphi$

ω_0 СОПСТВЕНА КРУЖНА УЧЕСТАНОСТ

T_0 ПЕРИОД (СОПСТВЕНИ) (ВРЕМЕ ПОТРЕБНО ЗА 1 ОСЦИЛ.)

→ УОБИЧАЈЕНО СЕ ЗА РЕШЕЊЕ ПРЕТПОСТАВЉА Ae^{Bt+C}

$$\dot{x} = ABe^{Bt+C}$$
$$\ddot{x} = AB^2e^{Bt+C}$$

$\rightarrow mAB^2e^{Bt+C} = -kAe^{Bt+C}$

$\Rightarrow B = \sqrt{\left(-\frac{k}{m}\right)} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

↓

2 РЕШЕЊА!! (Ј-НА II РЕДА)

⇒ Ј-НА 2 РЕДА ИМА 2 НЕЗАВИСНА РЕШЕЊА.

АКО ЈЕ Ј-НА ЛИНЕАРНА, ОНДА ВАЖИ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ

$$x(t) = A_1 e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + C} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + C}$$

НЕКА ЈЕ $C = 0;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ОЈЛЕРОВ ЗАПИС КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

$$\left.\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{+i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} \\ x(t) &= C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \\ x(t) &= D_1\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ x(t) &= E_1\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}}$$

АЛТЕРНАТИВНИ ЗАПИСИ ИСТЕ ФУНКЦ. ЗАВИСНОСТИ.

☐ ШАБЛОН ☺

$m\ddot{x} = -kx$ је диференцијална ј-на

$ms^2 = -ks^0$ је карактеристични полином

$s^2 = \frac{-k}{m}$

$x \to s$

број тачкица $\to$ степен

$s_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ је решење карактеристичног полинома

број решења одговара реду диф. ј-не

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

је опште решење које има онолико чланова Ae^{st} колико постоји решења карактеристичног полинома

☐

Ако је кретање описано диф. ј-ном 2. реда која је таква да постоји само члан без извода поред члана са другим изводом:

$$k_1\ddot{x} + k_2 x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \boxed{\frac{k_2}{k_1}}x = 0 \Rightarrow$$

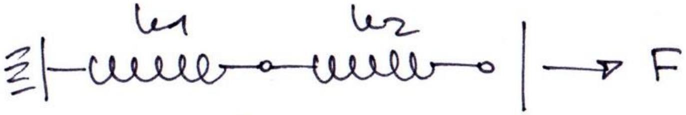
Сопствена кружна учестаност је $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$

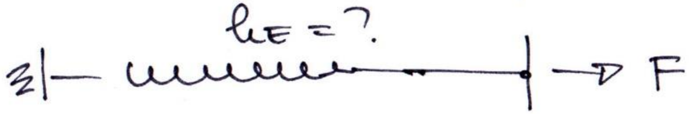
$\rightarrow$ решење: $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Пр.22 Одредити закон кретања, а затим и сопствену кружну учестаност и период осциловања линеарног хармонијског осцилатора који се састоји од тега масе m који је везан за идеалну опругу крутости k тако да осцилује по равној глаткој подлози. У почетном тренутку опруга је истегнута за растојање x_0 и тег мирује. Скицирати график зависности укупне енергије, кинетичке и потенцијалне енергије овог осцилатора током једне осцилације.

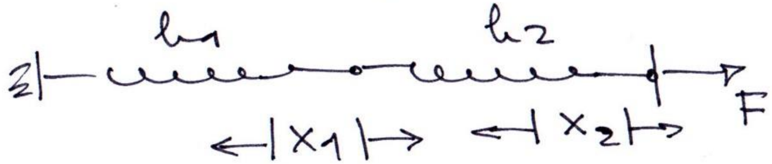
ЕКВИВАЛЕНТНА КРУТОСТ

1.





ТАКО ДА ИСТЕЗАЊЕ БУДЕ ИСТО ПОД ДЕЈСТВОМ ИСТЕ СИЛЕ?



$$F = k_1 x_1 \rightarrow x_1 = F/k_1$$

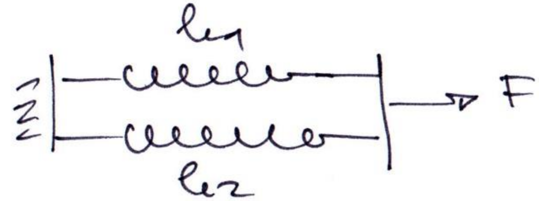
$$F = k_2 x_2 \rightarrow x_2 = F/k_2$$

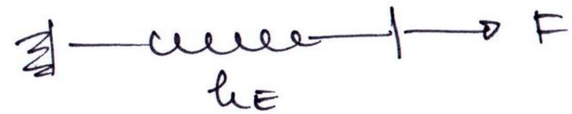
$$F = k_E \cdot x = k_E (x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{k_E} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

ЕКВИВАЛЕНТНА КРУТОСТ РЕДНО ВЕЗАНИХ ОПРУГА

2.





$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x$$

$$F = (k_1 + k_2) x$$

$$F = k_E \cdot x$$

$$\Rightarrow \boxed{k_E = k_1 + k_2}$$

ЕКВИВАЛЕНТНА КРУТОСТ ПАРАЛЕЛНО ВЕЗАНИХ ОПРУГА

□ ЕНЕРГИЈА ЛХО

→ ЕЛАСТИЧНА СИЛА ЈЕ КОНЗЕРВАТИВНА СИЛА → $A_{EL} = -\Delta E_p$ → ВАЖИ ЗАКОН ОДРЖАЊА МЕХАНИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ СИСТЕМА (НЕМА ОТПОРА/ТРЕЊА)

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

→ $\boxed{E_k + E_p = const = E}$ → УКУПНА МЕХАНИЧКА ЕНЕРГИЈА

КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow E_p = \frac{1}{2} k \left(A \sin(\omega_0 t + \varphi)\right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(A\omega \cos(\omega_0 t + \varphi)\right)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

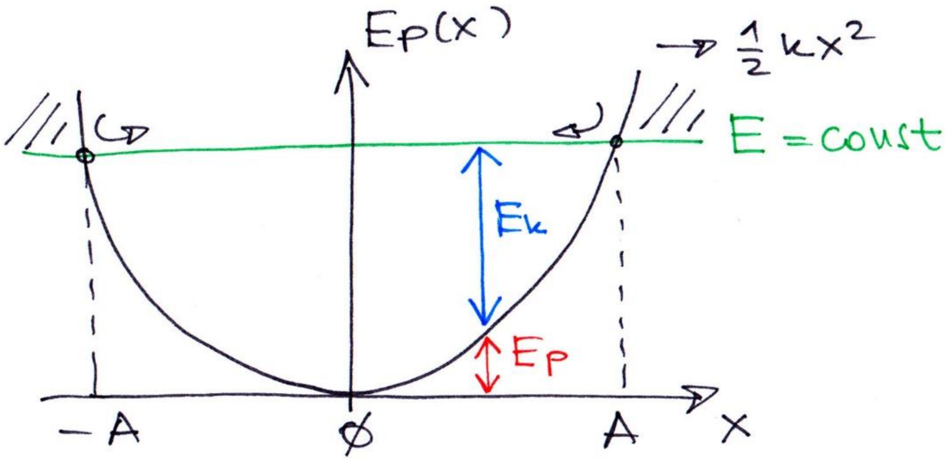
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \cancel{m} A^2 \frac{k}{\cancel{m}} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2}$$

$$\boxed{E = E_{p,max} = E_{k,max}}$$

ГРАФИЧКИ ПРИКАЗ ЕНЕРГИЈЕ ЛХО



$$E = E_{k,max}\Big|_{E_p=0}$$

$$E = E_{p,max}\Big|_{E_k=0}$$

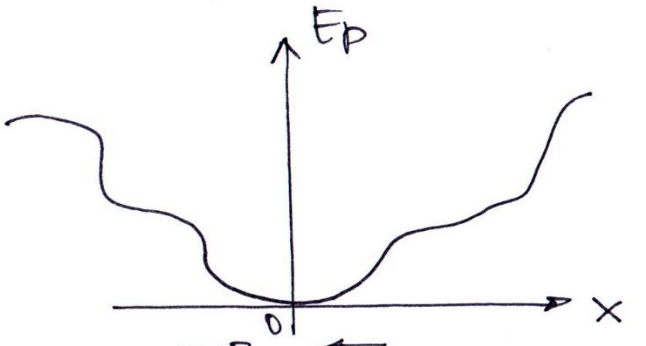
МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ У СИСТЕМИМА КОЈИ НИСУ ЛИНЕАРНИ

$$E_p(x) = \underset{\text{реф. вредност}}{E_p(0)} + \underbrace{\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=0}\cdot x}_{\text{стабилна равнотежа}} + \frac{1}{2!}\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=0} x^2 + \dots$$

СТАБИЛНА РАВНОТЕЖА

→ МИНИМУМ ЕНЕРГИЈЕ

$$\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$



МАЛИ ОПСЕГ У ОКОЛИНИ ТАЧКЕ КОЈА ОДГОВАРА <u>СТАБИЛНОЈ РАВНОТЕЖИ</u> (НЕ МОРА БИТИ $x=0$!!)

$$\Rightarrow \quad E_p(x) \cong E(0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2$$

ЗА КОНЗЕРВАТИВНЕ СИЛЕ (А ЕЛАСТИЧНОСТ ЈЕСТЕ КОНЗЕРВАТИВНА СИЛА)

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e_x} = -\frac{1}{\cancel{2}}\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x=0} \cdot \cancel{2}x\vec{e_x}$$

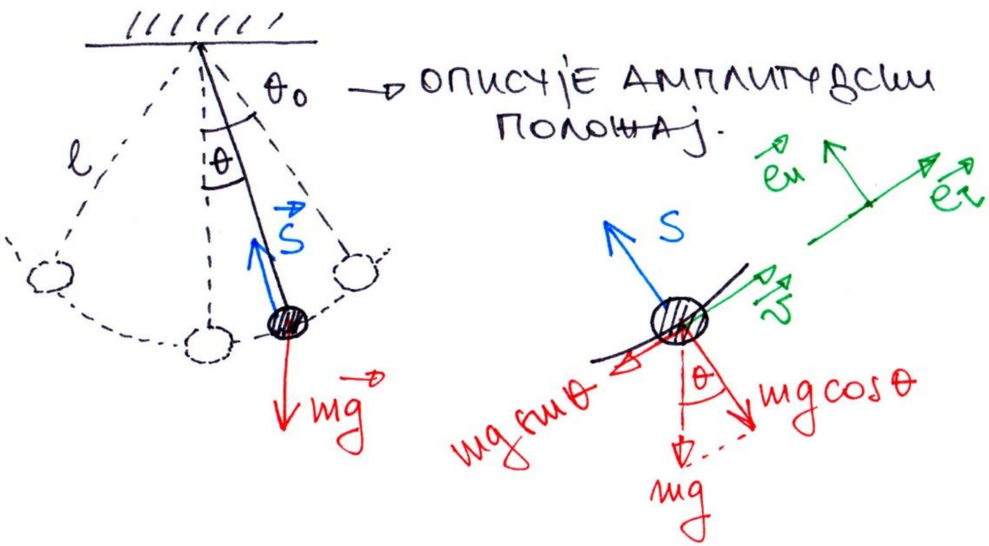
$$\vec{F} = -\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x=0} x\vec{e_x} = -kx\vec{e_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\cdot\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x=0}}$$

(ТАЧКА СТАБИЛНЕ РАВНОТЕЖЕ)

АЛТЕРНАТИВНИ ПРИСТУП ОДРЕЂИВАЊА СОПСТВЕНЕ КРУЖНЕ УЧЕСТАНОСТИ ПРЕКО ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ

МАТЕМАТИЧКО КЛАТНО



$\theta_0 \to$ ОПИСУЈЕ АМПЛИТУДСКИ ПОЛОЖАЈ.

2. $I\vec{\alpha} = \sum \vec{M}$ $\quad \ddot{\vec{\theta}}$

$ml^2 \cdot \ddot{\vec{\theta}} = \vec{M}_s + \vec{M}_{mg}$

$\cancel{m} l^{\cancel{2}} \ddot{\theta} = -\cancel{m} g \cancel{l} \sin\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

1. $ma_n = S - mg\cos\theta$

$ma_\tau = -mg\sin\theta \, . \to ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

$s = l\theta \to \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \to$ НЕЛИНЕАРНА ДИФ. ЈНА 2. РЕДА ☹

АПРОКСИМАЦИЈА МАЛИХ ОСЦИЛАЦИЈА:

ОТКЛОНИ СУ МАЛИ $\to$ УГЛОВИ СУ МАЛИ:

$\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta \approx 1 \to tg\theta \approx \sin\theta \approx \theta$

У РАДИЈАНИМА!! КОЛИКО МАЛИ?

→ У АПРОКСИМАЦИЈИ МАЛИХ УГЛОВА

$\sin\theta \approx \theta$ → $\ddot{\theta} + \boxed{\frac{g}{l}}\theta = 0$ → $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)}$

→ $\boxed{\omega_0^2 = g/l}$ → $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ПЕРИОД СОПСТВ. ОСЦИЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ КЛАТНА

☐ НЕЛИНЕАРНЕ J-НЕ НЕ УМЕМО ДА РЕШИМО АНАЛИТИЧКИ

↓

СРЕЋОМ ПОСТОЈЕ РАЧУНАРИ КОЈЕ МОЖЕМО ИСКОРИСТИТИ ДА РЕШЕЊЕ НАЂЕМО НУМЕРИЧКИ

→ НА ПРИМЕР, У MATLAB-У ИЛИ PYTHON-У

↓

РАЧУНАРСКО МОДЕЛОВАЊЕ ФИЗИЧКИХ ПОЈАВА

ЗАШТО ЈЕ ТО ИНТЕРЕСАНТНО?

ЗБОГ ФЕНОМЕНОЛОШКИХ ПРЕСЛИКАВАЊА.

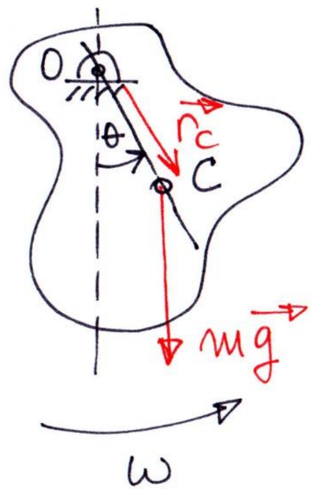
Пр.23 Мало тело масе m причвршћено је лаким и неистегљивим концем дужине l за непокретни ослонац, тако да може слободно осциловати у вертикалној равни у пољу Земљине теже.

а) Одредити сопствени период малих осцилација овог клатна.

б) Одредити максималну кинетичку енергију и укупну енергију осцилатора ако је θ_0 максимални отклон клатна.

ц) За исту вредност максималног отклона као у претходној тачки одредити максималну и минималну силу затезања у концу.

ФИЗИЧКО КЛАТНО



РОТАЦИЈА КРУТОГ ТЕЛА ОКО НЕПОКРЕТНЕ ОСЕ КРОЗ ТАЧКУ O ;

$$I_O \cdot \vec{\alpha} = \sum \vec{M}_O = \vec{M}_{mg}$$

I_O МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ ТЕЛА ЗА ОСУ КРОЗ O

$$\vec{M}_{mg} = \vec{r}_C \times m\vec{g}$$

МОМЕНТ СИЛЕ $m\vec{g}$

$\vec{r}_C$ КРАК СИЛЕ $m\vec{g}$

$$I_O \cdot \ddot{\theta} = - mg r_C \sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgr_C}{I_O} \cdot \sin\theta = 0}$$

ПАЗИ: ЗНАК ИСПРЕД ω_0^2 УВЕК МОРА БИТИ + У НОРМАЛНОЈ ФОРМИ ДИФ. ЈНЕ.

$\sin\theta \approx \theta$ (МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ)

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgr_C}{I_O} \cdot \theta = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgr_C}{I_O}} \end{array}}$$

Пр.24 Круто тело масе m окачено је у некој тачки (тачки вешања) која се у положају стабилне равнотеже налази за d изнад центра масе тела, тако да може осциловати у вертикалној равни у пољу Земљине теже.

а) Одредити сопствени период малих осцилација овог клатна.

б) Одредити у којој тачки вешања (на ком растојању у односу на центар масе) круто тело осцилује са највећом фреквенцијом.